Points épaissis, plis invisibles et symétries fantômes : Ce que la caractéristique positive donne à voir de la géométrie

Claudia Stadlmayr

Mai 2026

La géométrie algébrique se laisse souvent contempler au-dessus des nombres réels ou complexes, là où l'intuition visuelle nous accompagne. Mais dès que l'on passe à un corps de *caractéristique positive*, trois phénomènes étranges se font jour, que les commodités du monde complexe tendent parfois à dissimuler. D'abord, des points peuvent s'*épaissir* : là où l'on attendait des solutions distinctes, il n'en reste qu'une, mais dotée d'une multiplicité infinitésimale. Ensuite, une variété parfaitement lisse sur $\mathbb{C}$ peut soudain se *plisser* en une singularité, invisible tant que l'on ne change pas de caractéristique. Enfin, surgissent des symétries « fantômes » — des symétries *infinitésimales*, sans analogue sur $\mathbb{C}$, que l'on saisit à travers les *champs de vecteurs*. Ce sont ces trois fils — points épaissis, plis invisibles et symétries fantômes — que nous suivrons, en partant des notions les plus élémentaires pour aboutir à la géométrie des surfaces de del Pezzo.

1 Algèbre, variétés affines, premiers exemples et champs de vecteurs

L'un des plus anciens domaines des mathématiques, la géométrie, s'occupe d'objets spatiaux tels que les points, les courbes, les surfaces, etc. Au centre de la géométrie algébrique se trouve la compréhension d'objets géométriques particuliers, appelés *variétés algébriques*. Celles-ci se caractérisent par le fait qu'elles sont (localement) des ensembles de zéros de polynômes, ce qui permet d'utiliser des méthodes algébriques pour leur étude, par exemple des transformations de coordonnées des espaces ambiants (en termes géométriques) ou de simples substitutions (en termes algébriques).

Examinons maintenant plus précisément la notion de variété algébrique : considérons un corps k — on pense ici, pour se représenter de beaux tracés ou visualisations, aux nombres réels $\mathbb{R}$ ou aux nombres complexes $\mathbb{C}$, mais on peut aussi envisager des corps finis comme $\mathbb{F}_p$ avec p éléments, p premier. Sur ce corps k, on considère l'anneau de polynômes $k[x_0, \ldots, x_n]$ en $n+1$ variables. L'espace affine $\mathbb{A}_k^{n+1}$ est constitué de points $(a_0, \ldots, a_n)$ avec $a_i \in k$.

Nous appelons *variété algébrique affine* dans $\mathbb{A}_k^{n+1}$ un ensemble, noté $V(f_1, \ldots, f_r)$, de la forme

$$\{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^{n+1} \mid f_1(a_0, \ldots, a_n) = \ldots = f_r(a_0, \ldots, a_n) = 0\}.$$

C'est l'ensemble des zéros des polynômes $f_j \in k[x_0, \ldots, x_n]$.

Observons que, sur certains corps, cet ensemble de zéros peut ne contenir aucun point. Par exemple $C := V(x_0^2 + x_1^2 + 1)$: sur les nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation $x_0^2 + x_1^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution, c.-à-d. $C(\mathbb{R}) = \emptyset$. En revanche, sur les nombres complexes $\mathbb{C}$, on voit immédiatement quelques solutions, par exemple les points $(i, 0), (-i, 0), (0, i), (0, -i)$. On peut même vérifier qu'il existe un espace de solutions unidimensionnel :

$$C(\mathbb{C}) = \left\{ \left(\frac{i(1+u^2)}{2u}, \frac{1-u^2}{2u} \right) \;\middle|\; u \in \mathbb{C}^\times \right\} \;\cong\; \mathbb{C}^\times.$$

Le fait qu'il y ait des solutions sur $\mathbb{C}$ s'explique plus généralement par le fait que le corps des nombres complexes est *algébriquement clos*, ce qui signifie que tout polynôme non constant à coefficients dans ce corps possède une racine.

Comme nous nous sommes déjà représenté géométriquement les objets en considérant des points sur des variétés, je souligne que l'on peut encore munir l'espace affine d'une structure supplémentaire, à savoir une topologie : la *topologie de Zariski*, qui définit comme fermées précisément les variétés algébriques (ces dernières portant alors à leur tour la topologie induite). Une telle structure topologique est donc définie même lorsque — comme dans le cas de C — il n'existe pas de points sur les nombres réels : elle fournit une topologie bien définie sur les points L-valués, lorsque L parcourt les extensions de corps de k.

Au lieu de considérer des pathologies topologiques ou géométriques particulières, on peut aussi examiner, du côté algébrique, quelque chose qui paraît à première vue « non intuitif » ou moins ancré dans le « monde réel » : par exemple, les corps de *caractéristique positive* p, où p est un nombre premier et qui se caractérisent par le fait que p fois l'unité additionnée donne 0. Un exemple est le corps $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, avec p éléments.

Le polynôme considéré ci-dessus $x_0^2 + x_1^2 + 1 = 0$ admet sur $\mathbb{F}_2$ exactement deux solutions, à savoir $C(\mathbb{F}_2) = \{(1,0),(0,1)\}$. En comptant les solutions sur d'autres corps finis, on obtient par exemple

$$C(\mathbb{F}_3) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},$$
$$C(\mathbb{F}_5) = \{(0,2),(0,3),(2,0),(3,0)\},$$
$$C(\mathbb{F}_7) = \{(2,3),(2,4),(3,2),(3,5),(4,2),(4,5),(5,3),(5,4)\}.$$

Plus généralement, on peut montrer qu'il y a $p-1$ ou bien $p+1$ solutions, suivant que $p \equiv 1 \pmod 4$ ou bien $p \equiv 3 \pmod 4$. Cela est lié à la théorie des coniques et à la question de savoir si -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ ou non. Nous voyons donc ici aussi – à titre d'exemple pour la géométrie algébrique – comment des phénomènes algébriques et arithmétiques influencent la géométrie.

Dans ce même esprit, prenons les variétés $V(x), V(x^2), V(x^3), \ldots \subseteq \mathbb{A}^1_k$. Bien que, sur un corps k quelconque, elles ne contiennent toujours que l'origine de la droite affine comme point, elles peuvent être envisagées géométriquement de manière différente : nous pouvons penser $V(x^n)$ comme un « point épaissi », à épaisseur n.

Prenons maintenant un corps k algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{char}(k) = p \geq 0$. Alors $\mu_n := V(x^n - 1)$, la variété des racines n-ièmes de l'unité sur k, est constituée de n points distincts si $p \nmid n$. Par exemple, pour $k = \mathbb{C}$, on a :

$$\mu_n(\mathbb{C}) = \{\exp(2\pi i j/n) \mid j = 0, 1, \ldots, n-1\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

En revanche, si $p > 0$ et $p \mid n$, donc $n = p^k m$ avec k maximal tel que $p \nmid m$, on peut réécrire $x^{p^k m} - 1 = (x^m - 1)^{p^k}$, et on voit que ce polynôme a m zéros, à savoir les racines m-ièmes de l'unité, chacune avec *multiplicité* p^k.

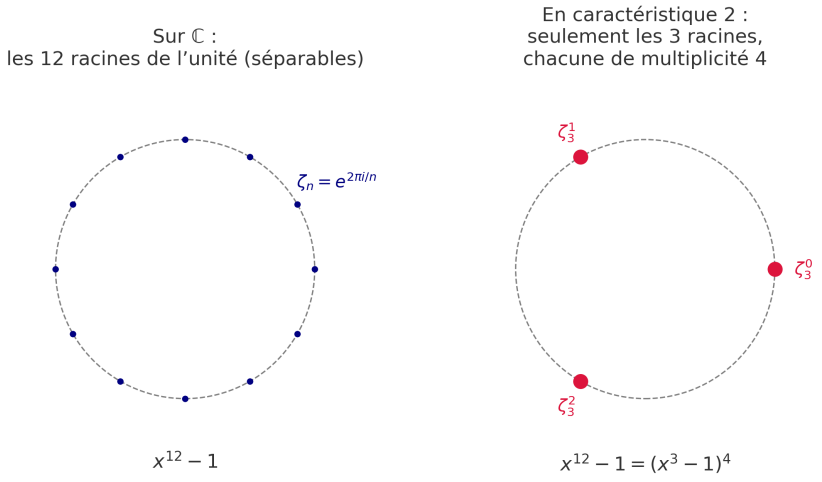


FIGURE 1 – Les racines n-ièmes de l'unité ($n = 12$).

On remarquera que l'apparition de « points épaissis » signifie en particulier que l'espace tangent de la variété en ce point n'est pas trivial. De façon intuitive, il existe une *direction infinitésimale* dans laquelle le point est épaissi : ainsi $V(x^2)$ n'est pas un simple point, mais un « point double », avec une direction supplémentaire qui reflète son épaisseur. Si l'on considère les symétries d'objets, par exemple par l'action des racines de l'unité μ_n, alors l'effet se réduit à une permutation discrète des points dans le cas de zéros simples. En revanche, dans le cas de zéros de multiplicité supérieure, des « orbites épaissies », sur lesquelles la symétrie agit de manière *infinitésimale*, apparaissent. C'est ici que les *champs de vecteurs* interviennent : ils décrivent les espaces tangents de telles symétries, c'est-à-dire les directions dans lesquelles une application se déplace dans l'infiniment petit. On peut donc comprendre les champs de vecteurs comme les traces infinitésimales, ombres ou esquisses inachevées des symétries (à l'intention des experts : les champs

de vecteurs sont les éléments de l'espace tangent au foncteur des automorphismes). Nous laisserons ces champs de vecteurs de côté le temps de mettre en place le décor géométrique — espace projectif, surfaces de del Pezzo et leurs singularités — pour les retrouver à la fin (section 8), là où ils révèlent les symétries fantômes de la caractéristique positive.

2 Espace projectif et variétés projectives

Une affirmation bien connue de la géométrie scolaire est que des droites parallèles ne se coupent pas. Ceci est vrai dans le cadre affine, par exemple pour deux droites parallèles dans $\mathbb{A}^2$. Dans le cadre projectif, en revanche, on a la formule courante : « *Les droites parallèles se coupent à l'infini.* » Le plan projectif $\mathbb{P}^2$ s'obtient en ajoutant au plan affine $\mathbb{A}^2$ une droite supplémentaire, appelée *droite à l'infini*. C'est là que se rencontrent les paires de droites affines qui étaient parallèles dans l'affine. On peut aussi comprendre ce procédé comme une *compactification* du plan affine.

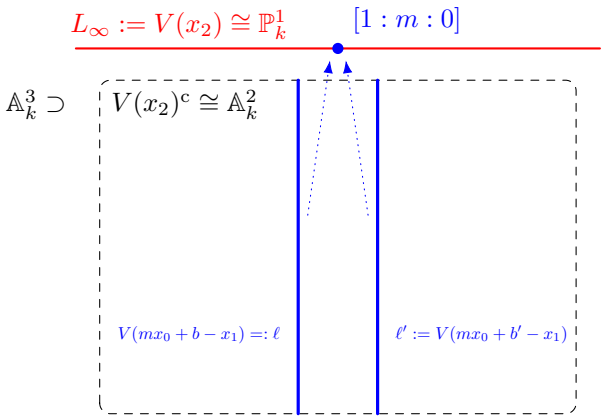


FIGURE 2 – Deux droites affines parallèles ℓ, ℓ' se coupent sur L_∞.

Pour généraliser cette image, on considère l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ comme l'ensemble des *droites passant par l'origine* dans l'espace affine de dimension $n+1$, $\mathbb{A}^{n+1}_k$. Plus précisément : un point de $\mathbb{P}^n_k$ correspond à un sous-espace vectoriel de dimension 1 de k^{n+1}. Un tel sous-espace peut être représenté par un $(n+1)$-uplet de vecteurs non nul $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$, deux $(n+1)$-uplets représentant la même droite s'ils diffèrent par une multiplication par un scalaire. On note alors le point projectif correspondant $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_k$.

Dans cette notation, on a $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ s'il existe un $\lambda \in k^\times$ tel que

$$(y_0, \ldots, y_n) = \lambda(x_0, \ldots, x_n).$$

Ainsi, $\mathbb{P}^n_k$ est l'ensemble des classes d'équivalence de $(n+1)$-uplets non nuls sous cette relation.

Comme dans le cas affine, on s'intéresse aux ensembles de zéros de polynômes dans l'espace projectif. Il faut considérer des *polynômes homogènes* pour qu'il ait un sens de dire « *un polynôme s'annule en un point projectif* ».

Un polynôme $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ est dit homogène de degré d, si

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n) \qquad \text{pour tout } \lambda \in k^\times.$$

Dans ce cas, l'assertion $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ ne dépend pas du choix du représentant $(x_0, \ldots, x_n)$, mais uniquement de la classe correspondante $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_k$. On peut donc dire de manière bien définie : « f *s'annule au point projectif* $[x_0 : \ldots : x_n]$. » Ainsi, on définit les *variétés projectives* $V(f_1, \ldots, f_r)$ comme des ensembles de la forme

$$\{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_k \mid f_1(x_0, \ldots, x_n) = \ldots = f_r(x_0, \ldots, x_n) = 0\},$$

où $f_1, \ldots, f_r \in k[x_0, \ldots, x_n]$ sont des polynômes homogènes.

Une classe fondamentale d'exemples est donnée par les *hypersurfaces* : une variété projective $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ est une *hypersurface* si $X = V(f)$, c'est-à-dire si elle est définie par une seule équation homogène.

3 Degrés des surfaces projectives, surfaces de degré minimal et surfaces de del Pezzo

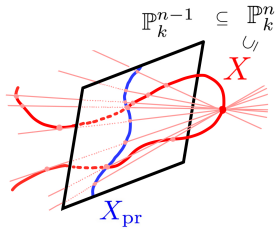
Pour étudier les variétés projectives, il est naturel de leur associer des invariants et d'examiner leurs valeurs possibles, afin de classer les variétés en différentes familles.

L'un de ces invariants est le *degré* $\deg(X)$ d'une variété projective $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Rappelons qu'une courbe est une variété de dimension 1, tandis qu'une surface est une variété de dimension 2 ; plus généralement, la codimension de X dans $\mathbb{P}^n_k$ est $\operatorname{codim}(X) = n - \dim(X)$. Le degré de X est défini comme le nombre de points obtenus en intersectant X avec un sous-espace linéaire de dimension complémentaire $n - \dim(X)$, choisi de manière générale. En particulier, le degré d'une hypersurface $V(f)$, c'est-à-dire le nombre de points d'intersection avec une droite générale dans $\mathbb{P}^n$, est exactement le degré du polynôme définissant f. Ce degré admet une borne inférieure :

Theorem (*Folklore*, voir [Mum76, Corollary 5.13])**.** *Soit $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ une variété projective non dégénérée, c.-à-d. que X n'est contenue dans aucun hyperplan. Alors on a* $\deg(X) \geq 1 + \operatorname{codim}(X)$.

Esquisse de preuve. *(par induction sur la codimension) Si* $\operatorname{codim}(X) = 1$, *donc $X = V(f)$, alors* $\deg(X) = \deg(f) \geq 2$, *puisque X est non dégénérée. Si* $\operatorname{codim}(X) > 1$, *on projette X à partir d'un point général sur un espace projectif plus petit $\mathbb{P}^{n-1}_k$. Une telle projection (a) réduit le degré de l'image X_{pr} d'au plus 1 et (b) réduit la codimension de 1. On obtient donc :*

$$\deg(X) \overset{(a)}{\geq} \deg(X_{\mathrm{pr}}) + 1 \overset{Ind.}{\geq} 2 + \operatorname{codim}(X_{\mathrm{pr}}) \overset{(b)}{=} 1 + \operatorname{codim}(X). \qquad \square$$



Ce théorème nous dit en particulier que, si X est une surface dans $\mathbb{P}^n_k$, son degré est au moins $n - 1$. Il y a environ 140 ans, Pasquale del Pezzo a classifié les surfaces projectives complexes *de degré minimal* [dP85] et a montré qu'une telle surface ne peut être que de l'un des quatre types suivants : un cône sur une conique dans $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, la *surface de Veronese* $\mathbb{P}^2$ plongée dans $\mathbb{P}^5$, ou un *scroll rationnel normal*, c'est-à-dire une surface formée par les droites joignant des paires de points sur certaines courbes spéciales dans l'espace. Ainsi, la classification des surfaces de degré minimal est relativement simple, et une telle surface ne peut être *singulière* que sous la forme d'un cône (voir Sections 4 et 5).

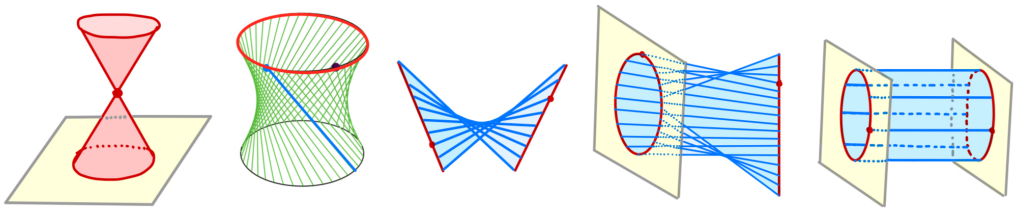


FIGURE 3 – Quelques exemples de surfaces de degré minimal.

Se pose alors naturellement – et c'est ce que del Pezzo a étudié l'année suivante [dP87] – la question des surfaces projectives de degré n dans $\mathbb{P}^n$. Plus précisément, lorsqu'elles ne sont ni des cônes ni des projections de surfaces de degré minimal situées dans un espace projectif de dimension supérieure, del Pezzo a montré que de telles surfaces possèdent, d'une part, une géométrie très « ronde », « convexe », donc des propriétés de courbure très positives – en termes techniques : le *fibré anticanonique* est *ample* – et que, d'autre part, si elles sont singulières, elles n'admettent que des formes très douces de singularités, à savoir les *points doubles rationnels* (aussi appelés *singularités ADE*, *singularités de Klein* ou *singularités de du Val*). Ces surfaces sont depuis appelées *surfaces de del Pezzo*.

Les surfaces de del Pezzo jouent également un rôle fondamental dans le *Programme des Modèles Minimaux (MMP)*, ou *programme de Mori* — Shigefumi Mori a reçu en 1990 la médaille Fields pour ses travaux pionniers dans ce domaine (voir [Mor82], [KM98], ou pour une synthèse [Bla19]). Ce programme classe les variétés projectives lisses en partant d'un modèle initial plus compliqué et en le transformant en modèles plus simples par des *transformations birationnelles*. Deux variétés sont dites *birationnelles* si elles coïncident sur un grand ouvert commun. Dans chaque classe de birationalité, on cherche donc les représentants les plus simples possibles. Dans le cas des courbes, c'est-à-dire des variétés de dimension 1, c'est trivial, car toute application birationnelle entre courbes lisses est déjà un isomorphisme. Dans le cas des surfaces, il existe trois types fondamentaux de blocs de construction : des modèles de courbure

pas trop positive (par ex. *surfaces K3, surfaces de type général, surfaces elliptiques*), des surfaces qui s'écrivent comme une fibration d'une courbe sur une courbe (les *surfaces réglées*), et les *surfaces de del Pezzo*, c'est-à-dire les *variétés de Fano* en dimension deux. En dimension supérieure, les surfaces de del Pezzo gardent un rôle essentiel, puisque leurs généralisations, les variétés de Fano, apparaissent comme « blocs de fibrations » possibles dans le MMP.

4 Singularités en géométrie algébrique et leur résolution

Dans le cadre du Programme des Modèles Minimaux (MMP), nous nous sommes jusqu'ici occupés uniquement de surfaces *lisses*. Dès sa classification originale des surfaces de degré (presque) minimal, del Pezzo a toutefois trouvé aussi des exemples possédant ce que l'on appelle des *singularités*.

Un point d'une variété algébrique peut être soit *lisse*, soit *singulier*. De façon intuitive, une singularité signifie que la variété présente en ce lieu une sorte de « pli ». Plus précisément : en un point singulier, la dimension de l'espace tangent est plus grande que celle de la variété elle-même.

Ceci est illustré dans les figures suivantes : on y voit une singularité de courbe ainsi qu'une singularité de surface (en rouge), comparées à des points lisses et à leurs espaces tangents (en bleu).

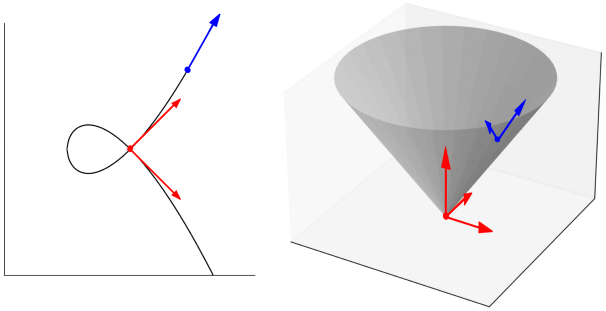


FIGURE 4 – Exemples de singularités : la courbe nodale et le cône (singularité A_1).

L'apparition de singularités ne peut pas seulement être reconnue visuellement (et cela est de toute façon trompeur, car on ne considère alors que les points réels), mais elle peut aussi être calculée de manière algébrique exacte. Pour cela, on utilise la *matrice de Jacobi*, c'est-à-dire la matrice de toutes les dérivées partielles des équations qui définissent la variété. Un point p d'une variété X est dit *singulier* si le rang de cette matrice au point p est inférieur à la codimension de X. Sinon, p est lisse. Les points lisses de X forment un ouvert de Zariski, car les points singuliers sont exactement ceux où s'annulent certains mineurs de la matrice de Jacobi, c'est-à-dire qu'ils sont définis par des équations polynomiales.

Avec ce critère, on peut facilement vérifier que le cône $V(z^2+xy) \subseteq \mathbb{A}^3_k$ est singulier à l'origine $(0,0,0)$ (et seulement là), car toutes les dérivées partielles $\partial_x = y$, $\partial_y = x$, $\partial_z = 2z$ s'annulent. On voit déjà ici que les singularités peuvent se comporter différemment sur des corps k de caractéristique $p > 0$ que sur les nombres complexes. En effet, il peut arriver que certaines dérivées disparaissent identiquement en caractéristique positive (par exemple $\partial_z = 2z = 0$ si $p = 2$).

Il peut même se produire qu'une variété soit lisse en caractéristique 0, alors que les mêmes équations définissent une variété singulière en caractéristique positive. Un exemple classique est la *quartique de Klein*

$$V(x^3y + y^3z + z^3x) \subseteq \mathbb{P}^2_k.$$

Si la caractéristique p est différente de 7, cette courbe est lisse, tandis qu'elle possède une singularité au point $[1:2:4]$ si $p = 7$.

On cherche à *résoudre* les variétés singulières par des *modifications minimales*, qui n'agissent que dans le voisinage des singularités et laissent la variété inchangée ailleurs. C'est-à-dire : à une variété singulière X, on associe une variété lisse $\widetilde{X}$, munie d'une application surjective $\pi : \widetilde{X} \to X$ à fibres compactes, qui est un *isomorphisme* au-dessus du lieu lisse de X et qui est « minimale » parmi toutes les résolutions possibles.

Un ancien problème de la géométrie algébrique demande si les singularités sont toujours résolubles : dès la fin du XIXè siècle, l'école italienne de géomètres algébriques (Castelnuovo, Enriques et d'autres) avait développé des procédures pour résoudre les singularités de surfaces complexes. Une première démonstration complète fut donnée par *Oscar Zariski* en 1939 [Zar39], jusqu'à ce que *Heisuke Hironaka* accomplisse en 1964 une percée majeure en montrant que, sur des corps de caractéristique 0, les singularités sont résolubles en *toute dimension* [Hir64], ce qui lui valut la médaille Fields en 1970.

Sur les corps de caractéristique positive, le problème est plus difficile : on ne connaît la résolution des singularités que jusqu'à la dimension 3 (grâce à Abhyankar (années 1950–60), Lipman (1978), Cossart–Piltant (2008, 2012), entre autres).

Dans le cas des surfaces, il existe une heuristique claire combinant deux procédures classiques issues de l'*algèbre* et de la *géométrie*, dont l'application répétée fournit une résolution minimale : la *normalisation* et l'*éclatement*.

La *normalisation* est un processus essentiellement algébrique (dans le langage de l'algèbre commutative : à tout anneau on peut associer sa clôture intégrale, qui possède la propriété que les localisations en idéaux premiers de hauteur 1 sont des anneaux locaux *réguliers*). Géométriquement, ce processus redresse une surface dans la mesure où toutes les singularités qui pourraient se trouver le long de courbes (dans des plis en forme de vallée de la surface ; voir à droite dans la figure 5) disparaissent, et il ne reste donc que des points singuliers isolés (voir au centre de la figure 5).

Ces points isolés sont ensuite traités par une deuxième opération, l'*éclatement* (*blow-up*). Intuitivement, on remplace le point singulier par l'ensemble de toutes ses *directions tangentielles* contenues dans la variété. Formellement, on obtient une application de la *surface éclatée* sur la surface initiale, qui est un isomorphisme en dehors du point singulier. La partie modifiée au-dessus de la singularité est appelée le *lieu exceptionnel* — dans le cas d'une singularité isolée de surface, il s'agit typiquement d'une configuration de courbes (ici la droite projective rouge $\mathbb{P}^1$ à gauche dans la figure 5).

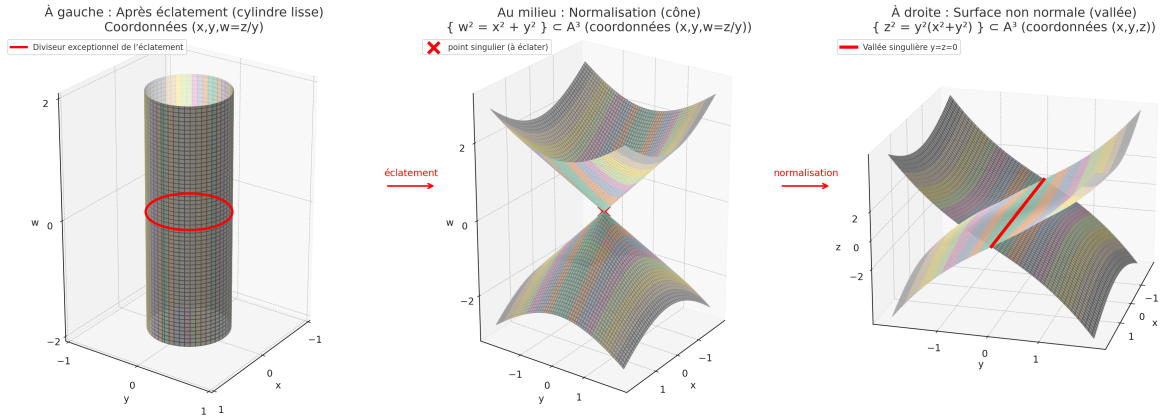


FIGURE 5 – Tracé sur $\mathbb{R}$: résolution d'une singularité de surface par normalisation et éclatement.

Dans cet exemple, une normalisation suivie d'un seul éclatement suffit déjà pour obtenir une résolution. Dans le cas général, il peut cependant arriver que, pour des surfaces, un éclatement en un point singulier isolé induise de nouveau un lieu singulier unidimensionnel. Il faut alors recommencer le processus : on commence à nouveau par une normalisation, suivie d'un éclatement, et ainsi de suite. Pour les surfaces algébriques, ce processus s'arrête cependant après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire que l'on obtient toujours ainsi une *résolution minimale*.

5 Exemples de singularités de surfaces : points doubles rationnels (RDPs)

Nous avons maintenant rassemblé suffisamment de contexte sur les singularités de surfaces pour décrire les *points doubles rationnels*, que del Pezzo avait déjà rencontrés à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle sur des surfaces de degré presque minimal.

De façon très géométrique, les points doubles rationnels se caractérisent par le fait qu'ils peuvent être résolus par un nombre fini d'*éclatements de points*, et que la configuration des *courbes exceptionnelles* qui apparaît dans la résolution est constituée uniquement de droites projectives, s'entrecoupant selon un certain motif : Chacune de ces $\mathbb{P}^1_k$ a *auto-intersection* (-2) : en général, le nombre d'intersection de deux courbes est le nombre de leurs points d'intersection (comptés avec multiplicité). Pour définir l'auto-intersection d'une courbe, on considère une petite « déformation » de celle-ci et on compte ses points d'intersection avec la courbe initiale. Une auto-intersection négative signifie que la courbe est *rigide*, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas se déplacer librement sur la surface : toute « copie » retombe sur la courbe originale. On peut se représenter cela par une métaphore : imaginer la surface comme un tissu avec des coutures. Une couture d'auto-intersection nulle pourrait être déplacée parallèlement dans le tissu, tandis qu'une couture d'auto-intersection négative est si solidement « cousue » qu'elle ne peut que se resserrer. Les différentes $\mathbb{P}^1_k$ s'intersectent entre elles dans des configurations correspondant aux *diagrammes de Dynkin*

A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 (voir figure 6). À partir de la configuration de courbes, on obtient le diagramme de Dynkin par *dualisation* : on trace un sommet pour chaque $\mathbb{P}^1_k$ et l'on relie deux sommets exactement lorsque les courbes correspondantes s'intersectent.

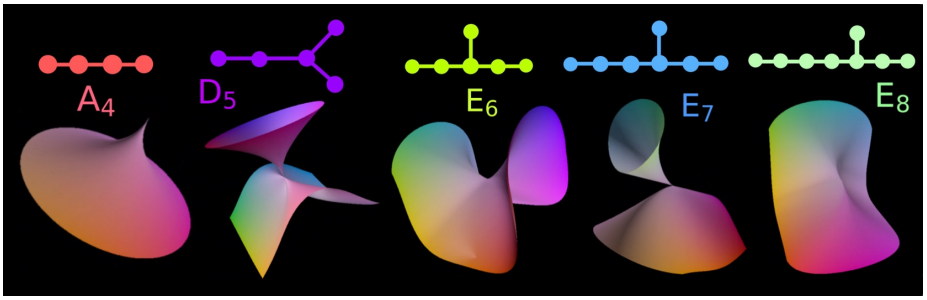


FIGURE 6 – Tracés réels de points doubles rationnels et diagrammes de Dynkin correspondants.

Le processus de résolution peut être illustré par l'exemple de la figure 7 (et aussi vérifié algébriquement comme exercice) : ici, la singularité E_7 sur la surface $V(z^2+x^3+xy^3)$ est résolue par éclatements successifs de points singuliers, jusqu'à ce que la configuration exceptionnelle finale du type E_7 apparaisse sur la surface lissée ainsi obtenue.

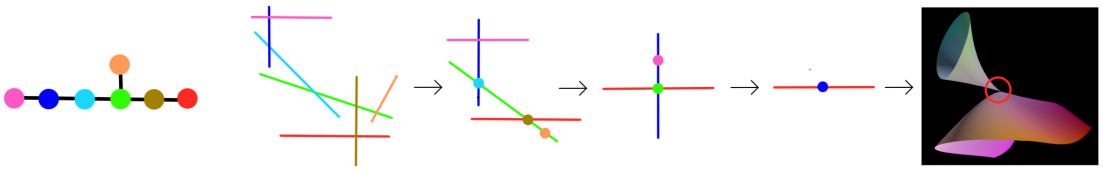


FIGURE 7 – Résolution de la singularité E_7 par des éclatements successifs de points singuliers.

6 Les RDPs d'un point de vue algébrique et subtilités en caractéristique positive

Après avoir donné dans la section précédente une caractérisation très géométrique des RDPs en termes de leurs graphes de résolution, je voudrais maintenant en donner une description *algébrique* équivalente : les points doubles rationnels sont des singularités qui peuvent être décrites *localement*, selon leur type de Dynkin, par l'une des équations suivantes.

Type	**Équation locale** f
A_n	$z^{n+1}+xy$
D_n	$z^2+x^2y+y^{n-1}$
E_6	$z^2+x^3+y^4$
E_7	$z^2+x^3+xy^3$
E_8	$z^2+x^3+y^5$

TABLE 1 – RDP = singularité de $V(f) \subseteq \mathbb{A}^3_k$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2,3,5$).

On remarque qu'ici, pour chaque type de Dynkin (cf. section 5), une seule équation locale est indiquée. Cela tient au fait que les points doubles rationnels sur des corps algébriquement clos de caractéristique différente de $2,3,5$ sont *tauts*, c'est-à-dire entièrement déterminés par leur graphe de résolution.

Conformément au *leitmotiv* mentionné dans la section 4, selon lequel les singularités se comportent de manière plus subtile en caractéristique positive, il apparaît que pour les points doubles rationnels sur des corps de caractéristique $2,3,5$, il existe plusieurs singularités non isomorphes qui possèdent pourtant le même graphe de résolution. Michael Artin a donné dans les années 1970 les équations correspondantes pour tous ces cas, en les distinguant par leur comportement de déformation [Art66]. Par exemple, en caractéristique 3, il existe deux singularités différentes de type E_7, notées E_7^0 et E_7^1, dont l'une se déforme sur l'autre. Cela apparaît déjà au niveau des équations :

$$E_7^0 :\ z^2+x^3+xy^3,\ (a=0) \quad \rightsquigarrow \quad E_7^1 :\ z^2+x^3+xy^3+ax^2y^2,\ (a\neq 0).$$

7 Pas de coïncidences : RDPs et diagrammes de Dynkin dans d'autres contextes

Après avoir présenté dans les sections 5 et 6 des caractérisations géométriques et algébriques des points doubles rationnels, il convient de souligner que ces singularités possèdent de nombreuses définitions équivalentes. Ceci tient au fait qu'elles se trouvent à l'intersection de plusieurs domaines de la géométrie algébrique.

Par exemple, elles jouent un rôle naturel dans le programme des modèles minimaux esquissé ci-dessus : dans le MMP pour les surfaces, ce sont exactement les *singularités canoniques*, c'est-à-dire les singularités les plus douces, presque lisses. Comme nous l'avons vu dans la section 3 consacrée aux surfaces de del Pezzo, celles-ci se distinguent par leurs propriétés de courbure positives (fibré anticanonique ample). Les singularités canoniques sont précisément celles qui ne perturbent pas cette positivité du fibré (anti-)canonique [DV34] et sont donc, dans le MMP, les singularités « inoffensives » encore admises, ce qui fournit une autre caractérisation des points doubles rationnels, cette fois-ci du point de vue de la géométrie birationnelle. Sur le corps des nombres complexes, il existe même au moins quinze définitions équivalentes [Dur79].

Classiquement, les équations des points doubles rationnels, telles qu'elles ont été données ici aussi dans le cas des nombres complexes (cf. tableau 1), sont apparues pour la première fois dans un tout autre contexte. On pourrait même dire que leur histoire remonte à plus de 2000 ans : Platon discutait déjà, dans le *Timée* [Pla25], des polyèdres. Les groupes de symétrie des solides platoniciens dans $\mathbb{R}^3$ (tétraèdre, cube & octaèdre ainsi que icosaèdre & dodécaèdre, qui forment chacun une paire duale), ainsi que les groupes de symétrie du $(n+2)$-gone dans l'espace et du $(n+1)$-gone dans le plan (cf. figure 8), correspondent (à conjugaison près) aux sous-groupes finis $G \subseteq SL_2(\mathbb{C})$ du *groupe linéaire spécial des matrices* (2×2).

Si l'on fait agir un tel G sur l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[x, y]$ en posant $(x, y) \mapsto A \cdot (x, y)$ pour $A \in G$, on peut déterminer les polynômes invariants. Il apparaît alors (après un calcul certes long mais élémentaire) que l'espace des polynômes invariants est de nouveau décrit par une seule équation dans l'espace tridimensionnel ; et ces équations sont exactement celles du tableau 1 (voir [Lam86], [Slo83] ou, classiquement, [Kle93]). Les RDPs sont d'ailleurs appelées *singularités de Klein* en l'honneur de Felix Klein.

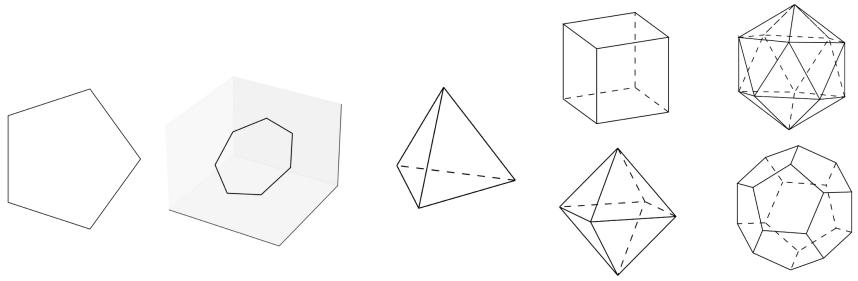


FIGURE 8 – Les groupes de symétrie de ces objets correspondent aux RDPs A_4, D_5, E_6, E_7, E_8.

Ce n'est pas seulement dans les classifications classiques (comme celle des polyèdres réguliers) que l'on rencontre des liens avec les diagrammes de Dynkin, mais, de manière enthousiasmante, aussi dans de nombreux autres domaines des mathématiques et des sciences naturelles : par exemple en *physique théorique* (théorie quantique des champs, théorie des cordes, monodromies), en *chimie*, comme codage des groupes de réflexion et des symétries des réseaux cristallins, ou même en *informatique*, lorsque, par exemple, les algèbres amassées apparaissent en théorie de la complexité, dans les représentations de carquois ou dans les bases de données. Les connexions sont nombreuses et sans doute pas purement fortuites — peut-être simplement pas encore pleinement découvertes ou construites. C'est pourquoi nous aimerions maintenant examiner un exemple concret.

Les diagrammes de Dynkin ont été introduits classiquement pour la première fois par Eugene Dynkin, dans le cadre de la classification de certaines *algèbres de Lie*. Il est donc naturel de se demander s'il existe un lien plus profond entre les algèbres de Lie et les RDPs que la simple « coïncidence » d'une classification par les mêmes diagrammes. En effet, une telle connexion existe. Elle a été établie par Brieskorn, Slodowy, Grothendieck et Springer ([Bri71], [Slo80]).

Considérons des *groupes algébriques linéaires* (ce sont des groupes qui possèdent une structure de variété affine compatible avec la loi de groupe). Leur espace tangent en l'élément neutre de la structure de groupe est une *algèbre de Lie*. Conformément à la classification des algèbres de Lie, on peut associer à un tel objet un diagramme de Dynkin. Nous allons maintenant esquisser un lien avec les singularités de surfaces du même diagramme de Dynkin : on peut définir une action naturelle du groupe algébrique linéaire initial sur son algèbre de Lie et considérer le quotient par cette action. Bien que la fibre de 0 dans ce quotient ne soit pas nécessairement de dimension 2, il est possible de restreindre la construction à une

« tranche » appropriée, de sorte que la section soit une surface algébrique. Cette surface possède, comme singularité, un RDP avec le même diagramme de Dynkin que le groupe algébrique d'origine.

Cette construction (due à Grothendieck) relie donc les deux classifications et peut même servir à construire des résolutions de plusieurs singularités qui se déforment les unes dans les autres, de manière *simultanée*, c'est-à-dire simultanée et compatible.

Ceci peut nous servir de point d'appui pour la pensée : les analogies reconnues, les moments d'illumination, les intuitions vagues ou les lueurs de ressemblances apparaissant à différents endroits des mathématiques suggèrent des liens plus profonds encore à découvrir, ou invitent à construire des théories unifiantes. Et, en fin de compte, les directions de la découverte et de la construction se révèlent souvent, avec le recul, être une seule et même chose.

8 Les RDPs sur les surfaces de del Pezzo et leurs déformations infinitésimales

Comme de telles résolutions simultanées peuvent, dans certains cas, être construites aussi au moyen des surfaces de del Pezzo [Tju70], lorsque les singularités y apparaissent, il est naturel de se demander quels points doubles rationnels peuvent en fait se trouver sur les surfaces de del Pezzo.

Les résolutions minimales $\widetilde{X}$ des surfaces de del Pezzo singulières X sont appelées *surfaces de del Pezzo faibles*, et elles possèdent une description très explicite : soit elles sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ ou à la *deuxième surface de Hirzebruch* $\mathbb{F}_2$, soit elles s'obtiennent comme suites d'éclatements d'au plus huit points du plan projectif $\mathbb{P}^2_k$, les points devant être en position générale suffisante (par exemple, pas plus de trois d'entre eux ne peuvent être alignés).

Cette description impose des restrictions au nombre et à la configuration des courbes projectives d'auto-intersection (-2) sur $\widetilde{X}$, et elle est donc (cf. section 5) utile pour déterminer les types de singularités sur X. En particulier, le diagramme de Dynkin du RDP doit avoir au plus huit sommets et être un sous-diagramme de E_8. Dès 1934, Patrick du Val a classifié tous les RDPs sur les surfaces de del Pezzo sur les nombres complexes. En caractéristique arbitraire, cette question est résolue de façon définitive dans [Sta21]. Il en ressort que, en caractéristique différente de 2, on retrouve les mêmes types et exceptions qu'en caractéristique 0, tandis qu'en caractéristique 2, de nouvelles singularités apparaissent (par exemple E_7^0), alors que d'autres disparaissent (par exemple six singularités A_1).

Aussi arbitraire que cela puisse paraître de prime abord, cela montre une fois de plus que la comparaison avec les phénomènes en petite caractéristique peut révéler les mécanismes géométriques « réels », quand ils restent plutôt dissimulés sur $\mathbb{C}$ par le concours de multiples commodités. (Ici, cela vient d'un lien avec les *fibrations elliptiques* et les groupes de 2-torsion des *courbes elliptiques*, qui, en caractéristique 2, se comportent différemment.) En un certain sens, la géométrie se montre dans les petites caractéristiques, considérées comme les plus pathologiques, dans son état le plus nu, le plus dépouillé et le plus authentique.

Un tel comportement authentique particulier se manifeste aussi dans l'étude des symétries infinitésimales des surfaces de del Pezzo et de leurs résolutions minimales. En caractéristique p, nous avons déjà vu ci-dessus en section 1 que les racines de l'unité peuvent avoir moins de points, mais avec une multiplicité plus grande, de sorte que leurs orbites deviennent des « points épaissis ». Ainsi, μ_p en caractéristique $p > 0$ consiste en un seul point épaissi p fois, tandis qu'au-dessus des nombres complexes il y a p racines de l'unité distinctes. De plus, il existe en caractéristique p d'autres symétries infinitésimales, comme le groupe infinitésimal α_p, que l'on peut penser comme le groupe des solutions de $x^p = 0$. Sur un anneau intègre, cette équation n'a bien sûr que la solution $x = 0$; mais, du point de vue des schémas, α_p garde une épaisseur infinitésimale non triviale. C'est précisément cette épaisseur invisible qui permet l'apparition de nouvelles symétries en caractéristique positive. Un tel phénomène n'existe pas en caractéristique 0.

Comme nous l'avons déjà expliqué, les champs de vecteurs sont des éléments de l'espace tangent des symétries (plus précisément : du schéma des automorphismes). Si cet espace tangent est plus grand que prévu en raison de la présence d'un champ de vecteurs supplémentaire, alors l'espace des symétries lui-même devient singulier. De tels phénomènes apparaissent en caractéristique positive et font que les surfaces de del Pezzo possèdent alors soudainement davantage de symétries.

La question se pose de savoir à quelle fréquence de tels phénomènes apparaissent en pratique : l'espace projectif, en tant que « surface la plus symétrique qui soit » avec son groupe de symétrie $\mathrm{PGL}_3(k)$, possède aussi de nombreux champs de vecteurs. D'autres surfaces lisses sont en général beaucoup plus « rigides ». Ainsi, une surface de del Pezzo générale n'a de chances de posséder des champs de vecteurs qu'en petits degrés ; à partir du degré ≥ 5, il n'en existe déjà plus.

Dans [MS24b], toutes les surfaces faibles de del Pezzo avec champs de vecteurs (ainsi que leurs configurations de courbes comme dans la figure 9) ont été complètement classifiées dans toutes les caractéristiques.

En revanche, sur des surfaces singulières, de nouveaux champs de vecteurs peuvent apparaître, souvent en raison de phénomènes arithmétiques fins en caractéristique positive. Ainsi, par exemple (voir section

La configuration de courbes négatives représentée dans la figure 9 (les courbes fines ont auto-intersection -1, les courbes épaisses auto-intersection -2) se trouve sur une surface faible de del Pezzo spéciale $\widetilde{X}$, obtenue comme éclatement de $\mathbb{P}^2_k$ en huit points en configuration spéciale. Cette surface existe aussi lorsque $\mathrm{char}(k) = 0$, mais elle n'y possède alors que des symétries infinitésimales triviales. Ce n'est qu'en $\mathrm{char}(k) = 2$ qu'apparaît un champ de vecteurs global, donné par une action des racines carrées de l'unité μ_2.

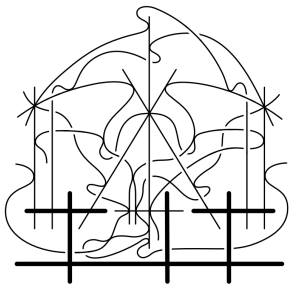


FIGURE 9 – Courbes négatives sur $\widetilde{X}$.

4), la quartique de Klein est lisse en caractéristique différente de 7, mais possède en caractéristique 7 une singularité cuspidale. Le groupe μ_7 agit alors infinitésimalement en ce point et engendre un champ de vecteurs. Sur la base de [MS24b], les surfaces de del Pezzo singulières avec champs de vecteurs ont également été classifiées dans [MS24a].

Pour conclure, je voudrais m'approcher, par des métaphores, des images mentales qui se dessinent plus clairement et plus directement en caractéristique positive : on pourrait se représenter les surfaces lisses comme une peau de tambour parfaitement tendue — là, en général, aucune oscillation supplémentaire (champ de vecteurs) n'est possible. Mais s'il y a une déchirure ou une irrégularité (singularité), des harmoniques inattendues apparaissent soudain. On peut aussi concevoir une surface algébrique comme un tissu (comme déjà en section 5), les symétries comme des plis, des rotations, des réflexions de ce tissu, et les champs de vecteurs comme de fines directions de tension esquissées dans la trame. Aux plis ou aux coutures (singularités), le tissu peut soudain se déplacer ou s'accrocher de manière inattendue.

Les phénomènes décrits ici montrent ainsi que la caractéristique positive n'est pas seulement une source de difficultés supplémentaires. Elle constitue aussi une lumière rasante sur la géométrie : elle fait apparaître des reliefs que les outils plus souples du monde complexe peuvent parfois lisser ou dissimuler. Lorsque ces outils ne s'appliquent plus sans friction, certaines structures se détachent avec plus de netteté. Les petites caractéristiques ne troublent donc pas seulement notre intuition : elles nous apprennent à mieux regarder.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Susanna Zimmermann, Jérémy Blanc, Alain Valette, Christian Liedtke, Gebhard Martin, Anne Schnattinger et Elias Kurz pour leurs échanges, leurs lectures et leurs encouragements. Je remercie également Christoph König et Marcel Lepper, ainsi que la Fondation Rilke, pour les impulsions autour de la poésie et de ses répercussions sur la pensée. Mes remerciements vont aussi à l'Université de Neuchâtel, au Prinzregentensalon e.V. et à la Philosophische Akademie München (PAM) pour les espaces de pensée et de dialogue qu'ils rendent possibles.

L'autrice reconnaît le soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique pour le projet *Del Pezzo surfaces over perfect fields* (grant no. 10003572).

Références

[Art66] M. Artin. On isolated rational singularities of surfaces. *Amer. J. Math.*, 88 :129–136, 1966.

[Bla19] J. Blanc. MMP et variétés de Fano, le travail de Caucher Birkar. *SMF–Gazette*, (162) :39–46, 2019.

[Bri71] E. Brieskorn. Singular elements of semi-simple algebraic groups. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2*, pages 279–284. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[dP85] P. del Pezzo. Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni. *Nap. Rend.*, 24 :212–216, 1885.

[dP87] P. del Pezzo. Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1 :241–271, 1887.

[Dur79] A. H. Durfee. Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. *Enseign. Math. (2)*, 25(1-2) :131–163, 1979.

[DV34] P. Du Val. On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, Parts I, II, III. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 30 :453–459 ; 460–465 ; 483–491, 1934.

[Hir64] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 79 :109–203 ; 79 (1964), 205–326, 1964.

[Kle93] F. Klein. *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Birkhäuser Verlag, Basel ; B. G. Teubner, Stuttgart, 1993. Reprint of the 1884 original, edited, with an introduction and commentary by Peter Slodowy.

[KM98] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.

[Lam86] K. Lamotke. *Regular solids and isolated singularities*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.

[Mor82] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math. (2)*, 116(1) :133–176, 1982.

[MS24a] G. Martin and C. Stadlmayr. RDP del Pezzo surfaces with global vector fields in odd characteristic. *Algebr. Geom.*, 11(3) :346–385, 2024.

[MS24b] G. Martin and C. Stadlmayr. Weak del Pezzo surfaces with global vector fields. *Geom. Topol.*, 28(8) :3565–3641, 2024.

[Mum76] D. Mumford. *Algebraic Geometry I : Complex Projective Varieties*, volume 221 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[Pla25] Plato. *Plato in Twelve Volumes. IX.* William Heinemann - Harvard University Press, 1925.

[Slo80] P. Slodowy. *Simple singularities and simple algebraic groups*, volume 815 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

[Slo83] P. Slodowy. Platonic solids, Kleinian singularities, and Lie groups. In *Algebraic geometry (Ann Arbor, Mich., 1981)*, volume 1008 of *Lecture Notes in Math.*, pages 102–138. Springer, Berlin, 1983.

[Sta21] C. Stadlmayr. Which rational double points occur on del Pezzo surfaces ? *Épijournal Géom. Algébrique*, 5(17) :27 pages, 2021.

[Tju70] G. N. Tjurina. Resolution of singularities of flat deformations of double rational points. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 4(1) :77–83, 1970.

[Zar39] O. Zariski. The reduction of the singularities of an algebraic surface. *Ann. of Math. (2)*, 40 :639–689, 1939.